Varianta 038

SUBIECTUL I

a) $\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

b) 5.

c) $m\left(A\hat{B}C\right)=\frac{\pi}{12}$

d) Deoarece $AC^2=BA^2+BC^2-2\cdot BA\cdot BC\cdot\cos B$, rezultă $\cos B=\frac{1}{8}$.

e) Sistemul $\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$ revine la ecuația $x^2=4$ care admite două soluții, deci dreapta este secantă cercului, adică există două puncte de intersecție.

f) $\left|(1+2i)^2\right|=5$.

SUBIECTUL II

1.

a) $C_5^3=10$.

b) $X_1=\{7\}$, $X_2=\{7,3\}$, $X_3=\{7,5\}$, $X_4=\{3,5,7\}$.

c) $p=\frac{2}{5}$.

d) $x=-1$.

e) Se poate alege $f=X^3-X^2$

2.

a) Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, rezultă că $y=0$ este asimptota orizontală spre $-\infty$.

b) $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

c) Deoarece $f'(x)<0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$, rezultă că f este descrescătoare. Atunci $f(2)>f\left(\sqrt{5}\right)$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$.

e) $\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3\frac{1}{x-1}\,dx=\ln|x-1|\Big|_2^3=\ln 2$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A)=0$ şi $\operatorname{rang}(A)=2$, deoarece $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3\neq 0$.

b) Cum $\det(B)=1\neq 0$, rezultă că matricea B este inversabilă.

c) $B^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $B^3=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

d) Cum matricea B este inversabilă, rezultă că $X=B^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

e) Pentru $n=1$ are loc egalitatea $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1\cdot 4}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Presupunem că

$B^k=\begin{pmatrix}1 & k & \frac{k\cdot(k+3)}{2}\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi demonstrăm că $B^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & k+1 & \frac{(k+1)\cdot(k+4)}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Avem

$B^{k+1}=B^k\cdot B=\begin{pmatrix}1 & k+1 & \frac{k^2+5k+4}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & k+1 & \frac{(k+1)\cdot(k+4)}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Atunci

$B^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n\cdot(n+3)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

f) Fie $Y=\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{pmatrix}$, atunci egalitatea $A\cdot Y=Y\cdot A$ implică

$\begin{pmatrix} x+2p & y+2q & z+2r \\ 3p & 3q & 3r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a & 2a+3b \\ 0 & x & 2x+3y \\ 0 & p & 2p+3q \end{pmatrix}$, de unde rezultă $Y=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 3b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

g) Dacă $Z=A^2$, atunci $Z\cdot A=A\cdot Z$ şi folosind f) avem $Z=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 3b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Egalitatea

$Z=A^2$ implică $\det(Z)=\det\left(A^2\right)=0$, ceea ce implică $a=0$. Deci $Z=\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 3b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

şi $Z^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq A$ pentru orice $b,c\in\mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV

a) $a_1=\frac{1}{6}<a_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}<a_3=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}$

b) Calcul direct.

c) Cum $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}>0$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$ rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

d) Folosind b) avem

$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$,

$\forall n\in\mathbf{N}^*$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{4}$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}+a_n\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{2(n+1)(n+2)}\right)^{n^2}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

g) $\int_1^2\frac{1}{x(x+1)(x+2)}dx=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$.